PCSI 1
2009-2010

Colle 14 première semaine

Du 10/05 au 14/05

1 Calcul intégral

- Fonctions en escalier sur un segment. Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Propriétés : linéarité, positivité, croissance, Chasles.
- Fonctions continues par morceaux sur un segment. Approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier sur un segment (ADMIS).
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Propriétés : linéarité, positivité, croissance, Chasles, inégalité de la moyenne, inégalité triangulaire généralisée.
- Pour une fonction f continue et positive sur un segment : s'il existe x_0 tel que $f(x_0) > 0$ alors son intégrale est strictement positive et si son intégrale est nulle alors f est nulle.
- Extension au cas des fonctions complexes.
- Définition d'une primitive. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Existence des primitives pour une fonction continue.
- Théorème fondamental de l'analyse : si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$.
- Intégration par parties.
- Changement de variable.
- Intégrale et fonctions paires et impaires.
- Intégrale des fonctions périodiques.
- Liste de primitives usuelles.
- Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Sommes de Riemann. L'approximation de l'intégrale d'une fonction continue par la méthode des rectangles est admise. Par contre elle a été démontrée pour une fonction $\mathcal{C}^1$ et dans ce cadre on a montré que l'erreur est un $O(\frac{1}{n})$ où n est le nombre de rectangles.
- Approximation par la méthode des trapèzes pour une fonction $\mathcal{C}^2$ (ADMIS).

2 Matrices : <u>Que le COURS</u>

- Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes comme élément de $\mathbb{K}^{np}$. Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Base canonique et dimension.
- Produit matriciel ses propriétés : associativité, bilinéarité, élément neutre.
- Application linéaire associée à une matrice.
- Transposition et ses propriétés : linéarité, involutivité, transposition d'un produit.
- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- Matrice d'une application linéaire dans des bases. Une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice dans des bases : isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Règles de calcul pour passer d'un point de vue vectoriel à un point de vue matriciel et vis versa.

- Anneau des matrices carrées de taille n. Pour deux matrices qui commutent, formule du binôme de newton et formule donnant $A^n - B^n$.
- Eléments inversibles : groupe $GL_n(\mathbb{K})$. L'inverse de la transposée d'une matrice est la transposée de l'inverse. Inversibilité (déterminant) et inverse des matrices carrées de taille 2.
- Une application linéaire est inversible ssi sa matrice dans des bases est inversible. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi pour tout Y le système linéaire $Y = AX$ d'inconnue X admet une unique solution. D'où une première méthode pour calculer l'inverse d'une matrice.
- En dimension n, une famille de n vecteur est une base ssi sa matrice dans une base est inversible.
- Une matrice carrée est inversible ssi ses colonnes forment une base ssi ses lignes forment une base.
- Définition des matrices carrées triangulaires supérieures et inférieures. Ces deux espaces forment un sous ev et un sous anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une matrice triangulaire est inversible ssi ses coeff diagonaux sont tous non nuls (dem ADMISE). L'inverse d'une matrice triangulaire sup (resp inf) est triangulaire sup (resp inf) (dem ADMISE).
- Définition de l'ensemble des matrices diagonales qui forment un sous ev et un sous anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Inversibilité et inverse d'une matrice diagonale.
- Définition des matrices symetriques ($\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$) et antisymétriques ($\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$). Leur dimension, base, supplémentarité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Définition d'une matrice de passage d'une base à une autre. Une matrice de passage est inversible, interprétation de son inverse comme matrice de passage. Interprétation d'une matrice de passage comme la matrice de l'identité dans les bonnes bases. Multiplication de deux matrices de passage.
- Théorème de changement de base pour les vecteurs et les applications linéaires.
- Définition de 2 matrices semblables. La relation de similitude est une relation d'équivalence.
- Définition du rang d'une matrice comme le rang de l'application linéaire associée ou comme le rang des colonnes.
- Une matrice carrée est inversible ssi sont rang est égal à sa taille.
- La multiplication par une matrice inversible à gauche ou à droite ne modifie pas le rang. Deux matrices semblables ont le même rang. Invariance du rang par transposition.
- Une matrice de rang r est équivalente à la matrice J_r.
- Définition des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Traduction en terme de multiplication par des matrices inversibles à gauche ou à droite.
- Méthode du pivot de Gauss pour le calcul du rang d'une matrice.
- Méthode du pivot de Gauss pour l'inversibilité et le calcul de l'inverse d'une matrice.